Section : Cours
Avant : Convergence des suites monotones
Après : Suites récurrentes

Comparaison de suites

Le résultat de base pour comparer deux suites est le suivant.

Théorème 3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} v_n \ .$$

Démonstration : Supposons $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive. Notons l cette limite. Pour n assez grand, $u_n - v_n \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$, donc $u_n - v_n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse.□

Observons que la conclusion reste vraie si au lieu d'être comparables pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n le sont «à partir d'un certain rang». Ceci vaut d'ailleurs pour tous les résultats de cette section. Par contre le fait de supposer $u_n < v_n$ implique seulement $\lim u_n \leqslant \lim v_n$: bien que $1/n < 2/n$, les deux suites $(1/n)$ et $(2/n)$ ont la même limite. Le théorème 3 ne permet pas de démontrer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 4 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que (v_n) tend vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |v_n|$, alors u_n tend vers 0.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$:

$$|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant \varepsilon \ ,$$

d'où le résultat.□

On en déduit le corollaire suivant que l'on trouve dans certains livres sous le nom de «théorème des gendarmes».

Corollaire 1 *Soient* (u_n)*,* (v_n) *et* (w_n) *trois suites de réels telles que* (u_n) *et* (w_n) *convergent vers la même limite* l*, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \ .$$

alors (v_n) *converge vers* l*.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 4 aux deux suites $(w_n - v_n)$ et $(w_n - u_n)$. □

Voici un exemple d'application. Soit

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n+2} \ .$$

Comme $(-1)^n$ vaut $+1$ ou -1, on a l'encadrement suivant.

$$\frac{n-1}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n+2} \ .$$

Les deux bornes de cette double inégalité tendent vers 1, donc $\lim u_n = 1$. La comparaison vaut aussi pour les limites infinies.

Théorème 5 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de réels telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \leqslant v_n$*.*

1. Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.
2. Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.

Démonstration : Pour tout A, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$:

$$v_n \geqslant u_n \geqslant A \ ,$$

donc v_n tend vers $+\infty$ si u_n tend vers $+\infty$. La démonstration de l'autre affirmation est analogue.$\square$

On dispose d'un vocabulaire adapté à la comparaison des suites.

Définition 9 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de réels.*

1. On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad |u_n| \leqslant M|v_n|\ .$$

   On écrit $u_n = O(v_n)$, qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».
2. On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\quad |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|\ .$$

   On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit « u_n est un petit o de v_n ».
3. On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\quad |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|\ .$$

   On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit « u_n est équivalent à v_n ».

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une suite (v_n) non nulle ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport u_n/v_n.

Proposition 3 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de réels. On suppose que les* v_n *sont tous non nuls. Alors :*

1. (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M\ .$$

2. (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

3. (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 1 :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Par exemple :

$$\sqrt{4n^2+1} = O(n)\,,\ \sqrt{4n^2+1} = o(n^2)\,,\ \sqrt{4n^2+1} \sim 2n\,.$$

L'équivalent de $n!$ donné par la formule de Stirling est souvent utile :

$$n!\ \sim\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,.$$

Observons que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n + v_n \sim v_n$, ce qui permet de calculer les équivalents de toutes les fonctions polynomiales de n. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $u_n \sim v_n$, et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$. Voici un exemple.

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}\,.$$

Comme $1+n = o(n^2)$, $n^2+n+1 \sim n^2$, donc $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8n^3+n^2} \sim 2n$, donc $\lim u_n = 1/2$.

Attention, il ne faut pas utiliser des équivalents pour des sommes. Par exemple :

$$u_n = n + (-1)^n \sim n \quad \text{et} \quad v_n = -n + (-1)^n \sim -n$$

Pourtant, $u_n + v_n$ n'est pas équivalent à 0. Voici trois résultats de comparaison de suites tendant vers l'infini, à connaître par cœur.

Théorème 6 *Soit a un réel strictement positif et r un réel strictement supérieur à 1. Alors :*

1. $r^n = o(n!)$;
2. $n^a = o(r^n)$;
3. $\ln(n) = o(n^a)$.

Démonstration :

1. Ecrivons le rapport de r^n à $n!$ comme suit.

$$\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{k} \; .$$

   La suite $(r/k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc il existe k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $r/k \leqslant 1/2$. Donc pour $n \geqslant k_0$:

$$\frac{r^n}{n!} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{r}{k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0} \; .$$

   La suite $(1/2)^{n-k_0}$ tend vers 0, d'où le résultat.

2. Posons $r = 1+h$, avec $h > 0$, et écrivons la formule du binôme de Newton :

$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \; .$$

   Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on peut minorer r^n par $\binom{n}{k}h^k$. Fixons $k = \lfloor a \rfloor + 1$. Pour $n > 2k$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut être minoré comme suit.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \; .$$

   Donc pour tout $n > 2k$:

$$\frac{n^a}{r^n} < \left(\frac{2^k k!}{h^k}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^{k-a} \; .$$

Le membre de droite tend vers 0, car par définition $k = \lfloor a \rfloor + 1 > a$.

3. Pour tout $n > 0$, posons :

$$k_n = \lfloor \ln(n) \rfloor \quad \text{et} \quad \alpha_n = \ln(n) - k_n \; .$$

La suite (k_n) est une suite d'entiers qui tend vers l'infini, car $k_n > \ln(n) - 1$. Les α_n sont des réels compris entre 0 et 1.

Ecrivons :

$$\frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{k_n + \alpha_n}{\mathrm{e}^{a(k_n+\alpha_n)}} \leqslant \frac{k_n}{(\mathrm{e}^a)^{k_n}} + \frac{1}{(\mathrm{e}^a)^{k_n}} \; .$$

Dans le membre de droite, le premier terme peut-être vu comme une suite extraite de la suite n/r^n, avec $r = \mathrm{e}^a$. Nous avons vu que cette suite tend vers 0 au point 2. Donc toute suite extraite tend aussi vers 0. Le dénominateur du second terme tend vers l'infini. Donc $\ln(n)/n^a$ est majoré par la somme de deux suites qui convergent vers 0. D'où le résultat.

□ Il est bon d'avoir en tête une échelle des «infiniment petits» et des «infiniment grands», c'est-à-dire des suites qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$. Pour présenter ces échelles sous forme synthétique, nous utilisons la notation $u_n \ll v_n$, qui est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

1. Infiniment petits

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1$$

2. Infiniment grands

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!$$

Section : Cours
Avant : Convergence des suites monotones
Après : Suites récurrentes